Lec 42 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

42.1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径和收敛区间

定理 42.1 (Abell 定理)

若幂级数在 $x_0 (\neq 0)$ 处收敛, 则在所有 $|x| < |x_0|$ 处收敛. 如果幂级数在 x_1 处发散, 则当 $|x| > |x_1|$ 时发散.

证明

1. 已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 则 $a_n x_0^n \to 0 \Rightarrow \exists M > 0, |a_n x_0^n| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$. 而 $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$, 由比较判别法, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛, 所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x| < |x_0|$ 处收敛.
2. 反证法: 若 $\exists x_2, |x_2| > |x_1|, \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ 收敛, 则由 1 知, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛, 矛盾, 所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x| > |x_1|$ 处发散.

从 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \rho = \rho(x) < 1 \Rightarrow |x| < \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|}$. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$ 时, 称 $\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|}$ 为收敛半径, 记为 $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|}$. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ 时,$R = +\infty$, 此时, 幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$ 时,$R = 0$, 此时, 幂级数只在 $x = 0$ 处收敛.

注 也可用 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 来判断收敛半径, 即 $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

当 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, +\infty)$ 时,$R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|} > 0$, 此时, 幂级数在 $(-R, R)$ 上收敛, 称 $(-R, R)$ 为收敛区间.

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 而言, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 0$, 则从 $|x - x_0| < R$ 推出 $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ 为收敛区间.

例 42.1 求下列幂级数的收敛半径, 收敛区间, 收敛域:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$;
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}(x+1)^{n-1}$;

3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{3n-2}}{3n-2}$.

解

1. $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right|=1$, 所以收敛半径 $R=1$, 收敛区间 $(-1,1)$. 而后判断端点处的收敛性, 当 $x=\pm1$ 时,$|a_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n(n+1)}$, 故收敛, 所以收敛域 $[-1,1]$.
2. $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{n^2/3^n}{(n+1)^2/3^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{n^2}{3n^2+6n+3}\right|=\dfrac{1}{3}$, 所以收敛半径 $R=3$, 解 $|x-1|<3$ 得收敛区间 $(-4,2)$. 而后判断端点处的收敛性质,$\sum_{n=1}^{\infty}fracn^23^n(-4+1)^n=\dfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2$ 发散; $\sum_{n=1}^{\infty}fracn^23^n(2+1)^{n-1}=\dfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}n^2$, 发散, 所以收敛域 $(-4,2)$.
3. $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^3}{3n+1}\right|=|x|^3=\rho(x)<1\Rightarrow|x|<1$, 所以收敛半径 $R=1$, 收敛区间 $(-1,1)$. 而后判断端点处的收敛性质, 当 $x=1$ 时,$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3n-2}$ 由 Leibniz 判别法收敛, 当 $x=-1$ 时,$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{-1}{3n-2}$ 发散, 所以收敛域 $(-1,1]$.

42.2 幂级数的 3 个分析性质

定理 42.2 (幂级数的和函数的连续性)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R, 则和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续.

证明 任给 $0<r<R$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_nr^n|$ 收敛, 而当 $|x|\leqslant r$ 时, 有 $|a_nx^n|\leqslant|a_nr^n|$. 由 Weierstrass 判别法, 幂级数在 $[-r,r]$ 上一致收敛. 对任意的 $x_0\in(-R,R)$, 一定在 r 使得 $x_0\in[-r,r]\subset(-R,R)$, 由幂级数在 $[-r,r]$ 上的一致性得和函数 $S(x)$ 在 $[-r,r]$ 上连续, 故 x_0 连续.

定理 42.3 (幂级数的积分性质)

幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 中 Riemann 可积, 并有

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},x\in(-R,R).$$

并且积分后的幂级数的收敛半径仍为 R.

证明 对 $\forall[0,x]\subset(-R,R)$,$\exists r_0\in(0,R)$, 使得 $[0,x]\subset[0,r_0]\subset[0,R)$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,x]$ 中一致收敛. 由 a_nx^n 在 $[0,x]$ 中的 Riemann 可积性, 可知和函数 $S(x)$ 在 $[0,x]$ 中 Riemann 可积. 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}/n+2}{a_n/n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, 可知积分后的幂级数的收敛半径仍为 R.

定理 42.4 (幂级数的微分性质)

幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 中可导, 并有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1},$$

且求导后的幂级数的收敛半径仍为 R.

证明 先求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 的收敛半径. 任取 $x_0\in(-R,R)$, 存在 $r:|x_0|<r<R$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n r^n|$ 收敛, 因此 $|a_n r^n|<M$ 有界, 所以

$$|na_n x_0^{n-1}|=|a_n r^n|\left|\frac{n}{r}\right|\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}\leqslant M\left|\frac{n}{r}\right|\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}.$$

因为 $\sum \frac{n}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}$ 当 $|x_0|<r$ 时收敛, 所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 在 x_0 绝对收敛. 也就是说 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 的收敛半径 $R'>R$.

如果 $R'>R$, 则存在 $x_0:R'>x_0>R$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|na_n x_0^{n-1}|$ 收敛. 因为

$$x_0|na_n x_0^{n-1}|=|na_n x_0^n|\geq|a_n x_0^n|,$$

所以 $\sum|a_n x_0^n|$ 收敛, 这是不可能的, 所以 $R'=R$.

作为幂级数,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 在 $(-R,R)$ 的任意闭子区间上一致收敛, 所以定理的结论在任意闭子区间上成立, 因此在 $(-R,R)$ 内每一点成立.

42.3 例题

例 42.2 求下列幂级数的收敛半径与和函数 $S(x)$:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$;
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$;
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n$.

解

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/n+1}{1/n}=1$, 所以收敛半径 $R=1$, 收敛区间 $(-1,1)$. $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1}=\frac{1}{1+x}$, 所以 $S(x)=\ln(1+x)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2n+1}}=1$, 所以收敛半径 $R=1$, 收敛区间 $(-1,1)$. $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\dfrac{1}{1+x^2}$, 所以 $S(x)=\arctan x$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/(n+1)!}{1/n!}=0$, 所以收敛半径 $R=+\infty$, 收敛区间 $(-\infty,+\infty)$. $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=S(x), S(0)=1$, 解微分方程得 $S(x)=\mathrm{e}^x$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$, 所以收敛半径 $R=1$, 收敛区间 $(-1,1)$. $\displaystyle\int_0^x\frac{S(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\,\mathrm{d}t=\frac{x}{x-1}\Rightarrow S(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$.

✍ 作业 ex7.3:1(2)(4)(5)(6),3(1)(2)(3),4(1)(4).